Agrégation interne 2003 de Mathématiques première composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [agregint03comp1s] v1.01 AG56

© 2003, D.-J. Mercier. Vous pouvez faire une copie de ces notes pour votre usage personnel.

Solution de la première composition de l'agrégation interne 2003 (AG56)

PREAMBULE

P.1. L'endomorphisme f est une application orthogonale positive si et seulement si il transforme la base orthonormale directe $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ en une base orthonormale directe $\left(f\left(\overrightarrow{i}\right), f\left(\overrightarrow{j}\right), f\left(\overrightarrow{k}\right)\right)$. Cela revient à dire que $\left(f\left(\overrightarrow{i}\right), f\left(\overrightarrow{j}\right)\right)$ est une famille orthonormale et $f\left(\overrightarrow{i}\right) \wedge f\left(\overrightarrow{j}\right) = f\left(\overrightarrow{k}\right)$. En utilisant les coefficients de M, la traduction devient :

$$\begin{cases} \forall i \in [1..2] \quad \sum_{j=1}^{3} m_{ij}^2 = 1 \\ m_{11}m_{12} + m_{21}m_{22} + m_{31}m_{32} = 0 \\ (m_{13}, m_{23}, m_{33}) = \left(\begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} \right). \end{cases}$$

P.2. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ sera l'un quelconque des vecteurs invariants (non nuls) par f. On sait d'ailleurs que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Inv} f$ des vecteurs invariants par une rotation f distinctes de l'identité est une droite vectorielle.

P.3. Il existe une base orthonormale directe de $\overrightarrow{E}$ dans laquelle la matrice de r s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{tr} r = 1 + 2\cos\theta$. L'application f sera un demi-tour si et seulement si $\theta \equiv \pi \ (2\pi)$.

P.4. Notons $\overrightarrow{D} = \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ la droite des vecteurs invariants par f, et $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{D}$. Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ se décompose de façon unique dans la somme directe orthogonale $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{P}$ sous la forme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_D + \overrightarrow{v}_P$ avec $\overrightarrow{v}_D \in \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{v}_P \in \overrightarrow{P}$. On a $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{v}_D + f\left(\overrightarrow{v}_P\right)$ avec

$$\frac{f\left(\overrightarrow{v}_P\right)}{\|\overrightarrow{v}_P\|} = \cos\theta \frac{\overrightarrow{v}_P}{\|\overrightarrow{v}_P\|} + \sin\theta\,\overrightarrow{n}$$

où $\overrightarrow{n}$ désigne un vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{v}_P$ dans $\overrightarrow{P}$ (autrement dit $\left(\frac{\overrightarrow{v}_P}{\|\overrightarrow{v}_P\|}, \overrightarrow{n}\right)$ forme une base orthonormale directe de $\overrightarrow{P}$ pour l'orientation de $\overrightarrow{P}$ compatible avec celle de $\overrightarrow{D}$). Le produit mixte est égal au déterminant dans une base orthonormale directe quelconque de $\overrightarrow{E}$. En exprimant le déterminant dans la base orthonormale directe $\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}_P}{\|\overrightarrow{v}_P\|}, \overrightarrow{n}\right)$, on obtient

$$\left[\overrightarrow{v}, f\left(\overrightarrow{v}\right), \overrightarrow{u}\right] = \left[\overrightarrow{v}_P, f\left(\overrightarrow{v}_P\right), \overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \|\overrightarrow{u}\| \\ \|\overrightarrow{v}_P\| & \|\overrightarrow{v}_P\|\cos\theta & 0 \\ 0 & \|\overrightarrow{v}_P\|\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}_P\|^2 \sin\theta,$$

ce qui montre que les signes de $[\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{u}]$ et $\sin\theta$ sont identiques.

Autre solution : On écrit encore $[\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{v}_P, f(\overrightarrow{v}_P), \overrightarrow{u}]$ comme ci-dessus, puis on utilise une autre expression du produit mixte, puis celle du produit vectoriel :

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{v}_P, f(\overrightarrow{v}_P), \overrightarrow{u}] &= \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}_P \wedge f(\overrightarrow{v}_P)) \\
&= \overrightarrow{u}.\left(\|\overrightarrow{v}_P\| \, \|f(\overrightarrow{v}_P)\| \sin\theta \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}\right) = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}_P\|^2 \sin\theta.
\end{aligned}$$

PARTIE I : ETUDE DU PENTAGONE REGULIER

I.1.a. Ona $\omega^5 = 1$ et $\overline{\omega} = \omega^{-1}$ (puisque $|\omega| = \omega\overline{\omega} = 1$). Par suite $\overline{\omega} = \omega^{-1} = \omega^{-1}\omega^5 = \omega^4$, $\overline{\omega}^2 = \omega^{-2} = \omega^{-2}\omega^5 = \omega^3$ et

$$\begin{aligned}
1 + (\omega + \overline{\omega}) + \left(\omega^2 + \overline{\omega}^2\right) &= 1 + \left(\omega + \omega^4\right) + \left(\omega^2 + \omega^3\right) \\
&= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 \\
&= \frac{1 - \omega^5}{1 - \omega} = 0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\omega + \overline{\omega} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

et

$$\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2 = 4\cos^2\frac{2\pi}{5} - 2$$

donc l'équation $1 + (\omega + \overline{\omega}) + \left(\omega^2 + \overline{\omega}^2\right) = 0$ s'écrit $-1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 4\cos^2\frac{2\pi}{5} = 0$. On sait que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est positif. Par conséquent $a' = \cos\frac{2\pi}{5}$ sera la racine positive de l'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$. Le discriminant réduit est $\Delta' = 5$, les racines sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$, donc

$$a' = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

I.1.b. La question précédente donne $a^2 + a - 1 = 0$, donc aussi $1 + b - b^2 = 0$ en divisant les deux membres par a^2. Le nombre b positif et satisfaisant l'égalité $b^2 = b + 1$ est le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ présent dans la divine proportion.

I.1.c. On a

$$a = 2a' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$b = \frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2\left(\sqrt{5} + 1\right)}{5 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

$$a+b=\sqrt{5}, \quad b-a=1,$$

et enfin

$$a^2+b^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2=3.$$

I.1.d. On a

$$\begin{aligned}
p &= \frac{A_0A_2}{A_0A_1}=\frac{\left|\omega^2-1\right|}{|\omega-1|}=|\omega+1| \\
&= \sqrt{\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2+\sin^2\frac{2\pi}{5}} \\
&= \sqrt{2+2\cos\frac{2\pi}{5}}=\sqrt{2+\frac{1}{b}}=\sqrt{\frac{2b+1}{b}}=\sqrt{\frac{b+b^2}{b}} \qquad \text{(puisque } b^2=b+1\text{)} \\
&= \sqrt{b+1}=b
\end{aligned}$$

Remarques : a) Ainsi $p=b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$ est égal au nombre d'or. C'est un résultat fort connu ayant permis d'attribuer un statut "magique" au pentagone régulier...

b) On aurait bien entendu pu mener les calculs en restant avec des coordonnées cartésiennes. Puisque

$$A_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \; ; \quad A_1\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\ \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\end{pmatrix}$$

et

$$A_2\begin{pmatrix}\cos\frac{4\pi}{5}\\ \sin\frac{4\pi}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\\ \sin\frac{4\pi}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a^2}{2}-1\\ \sqrt{1-\left(\frac{a^2}{2}-1\right)^2}\end{pmatrix},$$

on déduit

$$A_0A_2^2=\left(\frac{a^2}{2}-2\right)^2+\left(1-\left(\frac{a^2}{2}-1\right)^2\right)=4-a^2$$

et

$$A_0A_1^2=\left(\frac{a}{2}-1\right)^2+\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=2-a.$$

Enfin

$$p^2=\frac{4-a^2}{2-a}=2+a=2+\frac{1}{b} \quad \text{donc} \quad p=\sqrt{2+\frac{1}{b}}=b.$$

c) L'énoncé s'attend sans doute à ce que l'on déduise facilement p de b. Il va sans dire qu'on résolvera cette question de n'importe quelle façon si l'on s'aperçoit que la recherche du lien entre p et b demande trop de temps, cette recherche devant alors hypothéquer la suite du problème.

N'oublions jamais que le but de l'épreuve est de montrer ce que l'on sait (sans rester bloqué sur ce qu'on ne sait pas) et de gagner le plus de points possible en un temps limité !

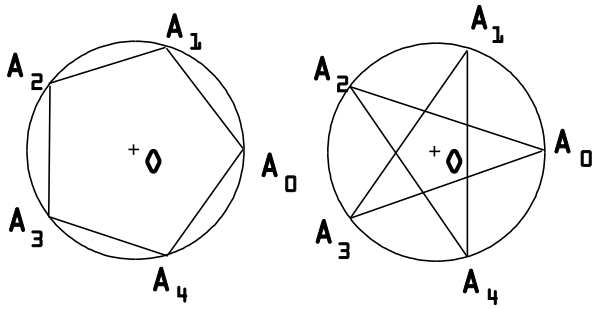
I.1.e. La question précédente nous a fourni

$$A_0A_1^2 = 2 - a = 2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

soit

$$A_0A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

I.2. • Si $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier, alors $A_0A_2A_4A_1A_3$ n'en est pas un au sens de la définition au sens de la définition acceptée dans cet énoncé[1].



• Supposons que le pentagone $M_0M_1M_2M_3M_4$ vérifie les conditions (a) et (b) et que toutes les distances M_kM_{k+1} valent $\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ (on pose commodément $M_m = M_n$ dès que m est congru à n modulo 5). Notons $\theta_k = \left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$. Montrer que $M_0M_1M_2M_3M_4$ est un pentagone régulier revient à prouver qu'il existe une orientation du plan pour laquelle $\theta_k = \frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$ pour tout k. Pour tout k l'égalité d'Al Kashi donne

$$\cos\theta_k = \frac{2r^2 - (M_kM_{k+1})^2}{2r^2} = 1 - \frac{1}{2r^2}\frac{r^2}{4}\left(10-2\sqrt{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}$$

d'où $\theta_k = \pm\frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$. Orientons le plan de façon à avoir $\theta_0 = \frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$, ce qui est toujours possible. Si l'un des indices k vérifie $\theta_k = -\frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$, posons

$$j = \operatorname{Inf}\left\{k \in [0,4]\ /\ \theta_k = -\frac{2\pi}{5}\right\} \geq 1.$$

Alors $\left(\overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_{j+1}}\right) = -\theta$ et $\left(\overrightarrow{OM_{j-1}}, \overrightarrow{OM_j}\right) = \theta$ entraînent $M_{j-1} = M_{j+1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse suivant laquelle tous les sommets du polygone sont distincts. En conclusion $\theta_k = \frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$ pour tout k et $M_0M_1M_2M_3M_4$ est un pentagone régulier.

I.3.a. • Un déplacement f conservant le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ est une application affine, donc transforme l'isobarycentre O de $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ en l'isobarycentre de $f(\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}) = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ qui n'est autre que O. Donc $f(O) = O$. Les

[1] L'énoncé appelle pentagone régulier ce que j'appelerais pentagone régulier convexe. Un pentagone régulier est en général défini par les conditions (a) et (b) et le pentagone régulier étoilé est en général considéré comme un polygone régulier. Ce n'est pas le point de vue de l'énoncé.

seuls déplacements du plan étant les rotations et les translations, on déduit que f est une rotation de centre O.

On vérifie que Γ est un sous-groupe de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{P})$:

a) Γ n'est pas vide car contient l'identité.

b) Si $f \in \Gamma$ alors f^{-1} est une isométrie laissant $A_0A_1A_2A_3A_4$ invariante donc $f^{-1} \in \Gamma$.

c) Si $f, g \in \Gamma$ alors $f \circ g$ est encore une isométrie telle que

$$f \circ g(\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}) = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\},$$

donc $f \circ g \in \Gamma$.

I.3.b. Si f est une rotation de Γ, il existe un entier m tel que $f(A_0) = A_m$. La rotation r^m vérifie aussi $r^m(A_0) = A_m$, et l'on sait qu'il existe une unique rotation de centre O transformant A_0 en A_m. Donc $f = r^m$ et

$$\Gamma \subset < r > = \left\{Id, r, r^2, r^3, r^4\right\}$$

où $< r >$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{P})$ engendré par r. Notons que $r^5 = Id$ et $r^4 \neq Id$ puisque r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{5}$, et que cela signifie que r est d'ordre 5, c'est-à-dire que $< r >$ est de cardinal 5. En fait nous aurons $\Gamma = < r >$ puisque toute rotation r^m ($m \in [0..4]$) vérifie

$$r^m(A_k) = r^m\left(r^k(A_0)\right) = r^{k+m}(A_0) = A_{k+m}$$

donc appartient à Γ. En conclusion $\Gamma = \left\{Id, r, r^2, r^3, r^4\right\}$ est le sous-groupe cyclique engendré par r et son cardinal est 5. Il est isomorphe au sous-groupe G de $\mathrm{SO}(E)$ engendré par la rotation vectorielle ρ d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et l'isomorphisme est l'application

$$\begin{array}{rccc} L: & \Gamma & \to & \mathrm{SO}(E) \\ & r^m & \mapsto & \rho^m \end{array}$$

qui à r^m associe sa partie linéaire.

I.3.c. Le groupe Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et les générateurs de Γ sont les rotations r^m ($m \in [0..4]$) telles que m soit premier avec 5, c'est-à-dire r, r^2, r^3 ou encore r^4.

Remarque : On peut éviter d'utiliser un résultat aussi général (que le lecteur pourra néanmoins démontrer à titre d'exercice), et raisonner ainsi. Si r^m est un élément quelconque de $\Gamma \setminus \{Id\}$ (autrement dit si $m \in [1..4]$), l'ordre du sous-groupe $< r^m >$ engendré par r^m est un diviseur de 5 distinct de 1, donc est égal à 5, et $< r^m > = \Gamma$.

PARTIE II : MISE EN PLACE DU DODECAEDRE

II.1.a. On a

$$\begin{aligned} \left(\left\|\overrightarrow{JA}\right\| = \left\|\overrightarrow{JD}\right\| = 2a\right) &\Leftrightarrow (a-1)^2 + 1 + \left(b'-1\right)^2 = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow \left(b'-1\right)^2 = 3a^2 + 2a - 2. \end{aligned}$$

Puisque $a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$,

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2a - 2 &= 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) - 2 \\ &= \frac{3}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right) - 1 + \sqrt{5} - 2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

et b' sera déterminé par

$$b' - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

On obtient donc

$$b' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = b.$$

II.1.b.

$$I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

et aussi

$$I' = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J' = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}.$$

II.2.a. • Notons

$$K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a $x > 1$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix},$$

et

$$\overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$K \begin{pmatrix} x \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L \begin{pmatrix} x \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le réel x est déterminé en écrivant $\left\|\overrightarrow{KB'}\right\| = \left\|\overrightarrow{KD}\right\| = 2a$ pour obtenir

$$(1-x)^2 + (a-1)^2 + 1 = 4a^2$$

soit $x = 1 + \sqrt{3a^2 + 2a - 2}$. D'après la solution de **I.1.a**, $a^2 + a - 1 = 0$, donc

$$x = 1 + \sqrt{3a^2 + 2a - 2} = 1 + \sqrt{3(1-a) + 2a - 2} = 1 + \sqrt{1-a} = 1 + \sqrt{a^2} = 1 + a = b \quad (\spadesuit)$$

et l'on trouve

$$K \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Notons

$$N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a $y > 1$,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix},$$

et

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}$$

donc

$$N \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -a \end{pmatrix}.$$

Le réel y est déterminé par les égalités $\left\|\overrightarrow{NA}\right\| = \left\|\overrightarrow{NB}\right\| = 2a$ qui s'écrivent

$$1 + (y-1)^2 + (a-1)^2 = 4a^2$$

d'où $y = 1 + \sqrt{3a^2 + 2a - 2} = b$ (voir ($\spadesuit$)). En conclusion générale,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad I \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix};$$

$$J\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}\ ;\quad K\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\quad L\begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\quad M\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -a \end{pmatrix}\ ;\quad N\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

II.3. Une équation du plan (AJD) est $\det\left(\overrightarrow{Am}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AD}\right) = 0$, i.e.

$$\begin{vmatrix} x-1 & a-1 & 0 \\ y-1 & -1 & -2 \\ z-1 & b-1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(b-1)\,x + (1-a)\,z + a - b = 0.$$

On vérifie alors aisément que les points K et L appartiennent au plan (AJD) en calculant

$$(b-1)\,b + (1-a)\times 0 + a - b = b^2 - 2b + a = 3\left(a^2 + a - 1\right) = 0$$

dans les deux cas.

De même, le plan (ANB) admet l'équation $\det\left(\overrightarrow{Am}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$, i.e.

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ y-1 & b-1 & 0 \\ z-1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-a)\,y + (b-1)\,z + a - b = 0.$$

Les points I et J appartiennent au plan (ANB) puisque

$$(1-a)\times 0 + (b-1)\,b + a - b = 0.$$

En conclusion

$$(AJDKL):\qquad (b-1)\,x + (1-a)\,z + a - b = 0,$$

$$(ANBIJ):\qquad (1-a)\,y + (b-1)\,z + a - b = 0.$$

II.4.a. On a

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2+a+2b \\ 0 \\ 2+b \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{5}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 2+b \\ 2+a+2b \end{pmatrix}.$$

On a $a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ et $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, donc

$$\overrightarrow{OO_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OO_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

II.4.b. En remplaçant a et b par leurs valeurs exactes, les équations des plans $(AJDKL)$ et $(ANBIJ)$ obtenues en (**II.3**) s'écrivent

$$(AJDKL): \qquad \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) x + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) z - 1 = 0,$$

et

$$(ANBIJ): \qquad \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) y + \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) z - 1 = 0.$$

Un vecteur normal à $(AJDKL)$ est $\overrightarrow{n}_{AJDKL} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$ et l'on vérifie que $\overrightarrow{OO_1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}_{AJDKL}$ en calculant les trois déterminants 2×2 construits avec les coordonnées de

$$\overrightarrow{n}_{AJDKL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OO_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

et en s'apercevant qu'ils sont tous nuls. En fait, un seul déterminant pourrait ne pas être nul, mais le calcul donne

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} & \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} & \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{vmatrix} = 0.$$

II.4.c. On a

$$\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5} \\ 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

et $\left\|\overrightarrow{O_1A}\right\| = \sqrt{2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$. Des calculs similaires montreraient que

$$\left\|\overrightarrow{O_1A}\right\| = \left\|\overrightarrow{O_1J}\right\| = \left\|\overrightarrow{O_1D}\right\| = \left\|\overrightarrow{O_1K}\right\| = \left\|\overrightarrow{O_1L}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

de sorte que tous les sommets de $AJDKL$ appartiennent au cercle du plan $(AJDKL)$ de centre O_1 et de rayon $r = \sqrt{2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}$. Pour appliquer (**I.2**) et démontrer que $AJDKL$ est un pentagone régulier, il reste à vérifier que tous les côtés de notre polygone mesurent $\frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$. Vérifions le seulement pour le côté $[AJ]$:

$$\overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

donc $\left\|\overrightarrow{AJ}\right\| = \sqrt{6-2\sqrt{5}}$, et l'on a bien $\left\|\overrightarrow{AJ}\right\| = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$.

II.4.d. On a

$$\cos\left(\overrightarrow{OO}_1, \overrightarrow{OO}_2\right) = \frac{\overrightarrow{OO}_1.\overrightarrow{OO}_2}{\left\|\overrightarrow{OO}_1\right\| \left\|\overrightarrow{OO}_2\right\|}$$

où

$$\overrightarrow{OO}_1.\overrightarrow{OO}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{10}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\left(5+3\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)$$

et $\left\|\overrightarrow{OO}_1\right\| = \left\|\overrightarrow{OO}_2\right\| = \sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}$. Par suite

$$\cos\left(\overrightarrow{OO}_1, \overrightarrow{OO}_2\right) = \frac{1}{100}\frac{\left(5+3\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}.$$

Remarque : L'écart angulaire $\theta = \left(\overrightarrow{OO}_1, \overrightarrow{OO}_2\right)$ est donc égal à

$$\theta = \arccos\left(\frac{2+\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\right) \simeq 1,1071 \text{ radians},$$

ou encore $\frac{1,1071\times 180}{\pi} \simeq 63,433$ degrés.

PARTIE III : MATRICE DE GRAM ET ISOMETRIES

III.1. On dénombre 12 faces et 5 simplexes par face, soit $12 \times 5 = 30$ simplexes au total.

III.2. Ici

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et les calculs $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA} = 3$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OJ} = 1 \times \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) + 1 \times 0 + 1 \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}$ etc. La matrice est symétrique puisque le produit scalaire est une forme bilinéaire <u>symétrique</u>. On obtient

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{5} & 1 \\ \sqrt{5} & 3 & \sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}.$$

III.3.a. S'il existe un automorphisme f transformant $[XYZ]$ en $[X'Y'Z']$, alors f transforme la base $\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}\right)$ en la base $\left(\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OY'}, \overrightarrow{OZ'}\right)$. Donc f est uniquement déterminée : de façon très précise, pour tous réels x, y, z,

$$f\left(x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY} + z\overrightarrow{OZ}\right) = x\overrightarrow{OX'} + y\overrightarrow{OY'} + z\overrightarrow{OZ'}. \qquad (*)$$

Réciproquement, si l'on définit f par $(*)$, alors f est bien un endomorphisme de E, et f transforme une base en une base donc est un automorphisme de E.

III.3.b. Tout revient à montrer l'affirmation

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \left\| x\overrightarrow{OX'} + y\overrightarrow{OY'} + z\overrightarrow{OZ'} \right\| = \left\| x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY} + z\overrightarrow{OZ} \right\|.$$

On a

$$\begin{aligned} \left\| x\overrightarrow{OX'} + y\overrightarrow{OY'} + z\overrightarrow{OZ'} \right\|^2 &= x^2\overrightarrow{OX'}^2 + xy\overrightarrow{OX'}.y\overrightarrow{OY'} + ... \\ &= (x,y,z)\,\mathcal{G}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= x^2\overrightarrow{OX}^2 + xy\overrightarrow{OX}.y\overrightarrow{OY'} + ... = \left\| x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY} + z\overrightarrow{OZ} \right\|^2, \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}\right) = \mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OY'}, \overrightarrow{OZ'}\right) = \mathcal{G}$.

III.3.c. $f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'}$ est un automorphisme positif, i.e. appartient à $\mathrm{SO}(E)$, puisque transforme la base directe $\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}\right)$ en une base directe $\left(\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OY'}, \overrightarrow{OZ'}\right)$. Les seuls éléments de $\mathrm{SO}(E)$ sont les rotations vectorielles (éventuellement réduites à l'identité).

III.3.d. • Il faudrait d'abord montrer G est inclus dans $\mathrm{SO}(E)$. L'énoncé nous demande d'admettre que tout automorphisme f de G transforme une face en une face, et j'admettrai ici que cela entraîne que tout automorphisme f de G transforme au moins un simplexe $\mathcal{S} = [XYZ]$ du dodécaèdre en un simplexe $\mathcal{S}' = [X'Y'Z']$ (on peut essayer de s'en persuader...). Cela permet d'utiliser (**III.3.a**) (**III.3.b**) et (**III.3.c**) et conclure à $f = f_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}'} \in \mathrm{SO}(E)$.

• G est un sous-groupe de $\mathrm{SO}(E)$: c'est un phénomène très général concernant les isométries conservant une partie de E, ici la partie $\Lambda = \left\{\overrightarrow{OA}, ..., \overrightarrow{ON'}\right\}$. En effet :

a) G n'est pas vide car contient l'identité.

b) Si $f \in G$ alors f^{-1} est une isométrie de $\mathrm{SO}(E)$ laissant la partie Λ invariante donc $f^{-1} \in G$.

c) Si $f, g \in G$ alors $f \circ g$ est encore une isométrie de $\mathrm{SO}(E)$ telle que $f \circ g(\Lambda) = \Lambda$, donc $f \circ g \in G$.

• Soit $f \in G$. f transforme une face en une face, donc un simplexe $\mathcal{S} = [XYZ]$ en un triplet $(X'Y'Z')$ où X', Y', Z' représentent des sommets d'une même face. Puisque f est une application orthogonale positive, elle conserve le produit scalaire et

$$\mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{OX'}, \overrightarrow{OY'}, \overrightarrow{OZ'}\right) = \mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}\right) = \mathcal{G}.$$

Il est facile de vérifier par le calcul que cette condition impose à X', Y', Z' de représenter des sommets consécutifs de la même face, autrement dit de constituer un simplexe $\mathcal{S}' = [X'Y'Z']$ du dodécaèdre (il suffit de calculer $\mathrm{Gram}\left(\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OW}\right)$ pour chaque triplet (UVW) d'une même face ne constituant pas un simplexe, pour constater que la matrice obtenue est distincte

de $\mathcal{G}$). Finalement, nous venons de prouver que, pour un simplexe $\mathcal{S} = [XYZ]$ fixé à l'avance, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & G & \to & \textbf{Simp} \\ & f & \mapsto & [f(X)\, f(Y)\, f(Z)] \end{array}$$

de G dans l'ensemble **Simp** des simplexes du dodécaèdre, est bien définie. Bien entendu Ψ est injective d'après (**III.3.a**). Puisque **Simp** est de cardinal $|\textbf{Simp}| = 60$ (**I.1**), on déduit $|G| \leq |\textbf{Simp}| = 60$.

III.4.a. Les colonnes des matrices

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

sont chaque fois des coordonnées de trois vecteurs qui forment une base orthonormale, donc r et s sont des applications orthogonales. Vérifions-le seulement pour S. On a

$$\left\| \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\|^2 = b^2 + 1 + a^2 = 4 \text{ donc } \left\| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\|^2 = 1,$$

tandis que $\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\|^2$ et $\left\| \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2$ donnent lieu au même calcul. De plus

$$\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = -b + a + ab = 0,$$

et de la même manière

$$\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

On vérifie ensuite que $\det R = \det S = 1$ ce qui prouve que r et s sont des rotations. Par suite $t = s \circ r$ est une rotation comme composée de deux rotations.

• **Etude de** r. La trace de r est $\operatorname{tr} r = 1 + 2\cos\theta = 0$ donc $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$ (2π). (**P.4**) nous montre que les signes de $[\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{u}]$ et $\sin\theta$ sont identiques dès que $\overrightarrow{u}$ dirige l'axe (orienté) $\overrightarrow{D}$ de r et pour l'orientation de $\overrightarrow{D}^{\perp}$ compatible. L'axe de r s'obtient en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et l'on trouve $x = z = y$. On peut choisir $\overrightarrow{u}(1,1,1)$. On calcule ensuite $[\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{u}]$ avec par exemple $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i}$:

$$[\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{u}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

et l'on peut affirmer que $r = \mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{u}(1,1,1), \frac{2\pi}{3}\right)$.

• **Etude de** s. La trace de r est $\operatorname{tr} r = 1 + 2\cos\theta = \frac{1}{2}(a+b+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ donc

$$\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}$$

et $\theta = \pm\frac{2\pi}{5}\ (2\pi)$. L'axe de s s'obtient en résolvant

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Après des calculs longs et fastidieux, on trouve une équation de l'axe de s :

$$\begin{cases} x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) z \\ y = 0 \end{cases}$$

et l'on peut choisir $\overrightarrow{u}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0, 1\right)$. Enfin

$$\left[\overrightarrow{i}, f\left(\overrightarrow{i}\right), \overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

donc $s = \mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{u}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, 0, 1\right), \frac{2\pi}{5}\right)$.

• **Etude de** t. On a $\operatorname{tr} t = 1 + 2\cos\theta = \frac{1}{2}(a-b-1) = -1$ donc $\cos\theta = -1$ et $\theta = \pi\ (2\pi)$. L'automorphisme t est donc un demi-tour et son axe s'obtient en résolvant

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On trouve la droite d'équation

$$\begin{cases} x = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) z \\ y = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) z \end{cases}$$

donc $t = \mathrm{Rot}\left(\overrightarrow{u}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, 1\right), \pi\right)$.

III.4.b. On calcule.

$$r\left(\overrightarrow{OA}\right) = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA},$$

$$r\left(\overrightarrow{OJ}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OL},$$

$$r\left(\overrightarrow{OD}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC'},$$

donc $r([AJD]) = [ALC']$.

$$s\left(\overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{OJ},$$

$$s\left(\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OD},$$

$$s\left(\overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b & -1 & a \\ 1 & a & -b \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OK},$$

donc $s([AJD]) = [JDK]$. Et enfin

$$t\left(\overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{OJ},$$

$$t\left(\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA},$$

$$t\left(\overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ a & -b & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} = \overrightarrow{ON},$$

donc $t([AJD]) = [JAN]$.

III.4.c. Les rotations r, s et t sont d'angles respectifs $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$ et π, donc seront d'ordres respectifs 3, 5 et 2.

III.5.a. On sait que $r([AJD]) = [ALC']$, $s([AJD]) = [JDK]$ et $t([AJD]) = [JAN]$, puis on complète en utilisant la figure fournie et en conjecturant que l'image d'une face par l'une de ces applications est une face, cela puisqu'on se doute bien que r, s et t appartiennent à G.

Ainsi la face $AJDKL$ est transformée par r en la face $ALC' * \bullet$, donc $* = M$ et $\bullet = N$. On le vérifie par exemple en calculant

$$r\left(\overrightarrow{OK}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -a \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM}.$$

Par ailleurs

$$r\left(\overrightarrow{ON}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \overrightarrow{OJ},$$

donc $r([JAN]) = [LAJ]$, puis $r([JANBI]) = [LAJDK]$. La dernière ligne du tableau est facile à compléter puisque $t = s \circ r$. On obtient :

	A	B	C	**D**	I	**J**	K	L	M	N
r	**A**	D	B'	**C**$'$	K	**L**	M	N	I	J
s	**J**	C	N'	**K**	M'	**D**	L	A	B	I
t	**J**	K	C'	**N**	L	**A**	B	I	M'	D

III.5.b. Comme $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$, on obtient par linéarité $r\left(\overrightarrow{ON'}\right) = -r\left(\overrightarrow{ON}\right)$. On a d'ailleurs déjà utilisé cette remarque pour construire le tableau précédent.

III.5.c. résulte de (**III.5.a**) et (**III.5.b**).

III.6. On va dénombrer au moins 60 rotations de G "du type r, s ou t", ce qui, allié à la majoration $|G| \leq 60$ de **III.3.d** permettra d'affirmer que le cardinal de G est 60.

• La rotation r est d'ordre 3 et transforme la face $AJDKL$ en $ALC'MN$. Son axe est donc (OA). Rien ne nous empêche de considérer toutes les rotations "du même type", c'est à dire d'ordre 3 et d'axes respectifs (OA), (OB), (OC), (OD), (OI), (OJ), (OK), (OL), (OM) et (ON). Les sommets retenus ici ne sont pas primés (tout simplement parce que $(OA) = (OA')$...). On obtient ainsi $10 \times 2 = \mathbf{20}$ rotations de G du type r (et distinctes de l'identité).

• La rotation s est d'ordre 5 et transforme la face $AJDKL$ en $JDKLA$. Cela nous offre 4 rotations de ce type associées à la même face $AJDKL$ (et différentes de l'identité), l'axe commun de ces rotations étant la droite joignant O au centre de gravité du pentagone $AJDKL$. Puisque le dodécaèdre possède 12 faces symétriques deux à deux par rapport à O, seulement 6 faces donneront chacune naissance à 4 rotations du même type s (c'est-à-dire d'ordre 5 et d'axes les droites joignant O aux centres de gravité des faces considérées). On obtient $6 \times 4 = \mathbf{24}$ rotations de G du type s.

• Le demi-tour t est associé à $[AJ]$, et son axe est la droite (OI_{AJ}) où I_{AJ} représente le milieu de $[AJ]$. On dénombre 30 arêtes du dodécaèdre, mais ces arêtes sont symétriques deux à deux par rapport à O, donc nous permettront de construire exactement **15** demi-tours distincts du type t.

• Conclusion : si nous n'oublions pas l'identité, nous avons obtenu

$$20 + 24 + 15 + 1 = 60$$

rotations de G.

Remarque : 1) Dans la partie IV, je décide de ne pas utiliser ce résultat.

2) On n'a pas seulement calculé le cardinal de G, on a explicité *toutes* les rotations de G, et constaté qu'elles étaient toutes du type r, s, ou t.

PARTIE IV : ISOMORPHISE DE G ET DE $\mathcal{A}_5$

IV.1. $|\mathcal{A}_5| = \frac{5!}{2} = 60$.

IV.2. On dénombre 12 faces et 5 f-diagonales par face, soit $12 \times 5 = 60$ f-diagonales pour le dodécaèdre. Ainsi $|\mathcal{D}| = 60$.

IV.3.a. $\mathcal{C}_1 = s(\mathcal{C}_0)$ et le tableau du (**III.5.a**) nous donne toutes les images des sommets de $\mathcal{C}_0 = ABCDA'B'C'D'$. On trouve $\mathcal{C}_1 = JCN'KJ'C'NK'$. On connaît les coordonnées de tous les sommets du dodécaèdre, donc une simple vérification montrerait que $\mathcal{C}_1$ est bien un cube. On peut aussi noter que l'image d'un cube par une isométrie est toujours un cube, et conclure plus rapidement. Les arêtes $[JC]$, $[CN']$... de $\mathcal{C}_1$ sont toutes des f-diagonales. Le même raisonnement montre que $\mathcal{C}_i$ ($i \in [2..4]$) est un cube dont les arêtes sont des f-diagonales. Toujours avec le tableau du (**III.5.a**), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_0 &= ABCDA'B'C'D', \\
\mathcal{C}_1 &= JCN'KJ'C'NK', \\
\mathcal{C}_2 &= DN'I'LD'NIL', \\
\mathcal{C}_3 &= KI'MAK'IM'A', \\
\mathcal{C}_4 &= LMBJL'M'B'J'.
\end{aligned}$$

IV.3.b. La f-diagonale $[AD]$ est l'arête du seul cube $\mathcal{C}_0$ parmi les 5 cubes $\mathcal{C}_i$ ($i \in [0..4]$).

IV.3.c. Soit $\mathcal{C}$ un cube de centre O inscrit dans le dodécaèdre et isométrique à $\mathcal{C}_0$. Il existe alors une isométrie f telle que $f(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}$. Les arêtes de $\mathcal{C}$ sont de longueur AB, et relient deux sommets du dodécaèdre, donc seront des f-diagonales. Choisissons une arête $[XY]$ de $\mathcal{C}$. C'est aussi une f-diagonale, donc c'est l'arête d'un unique cube $\mathcal{C}_i$ (**IV.3.b**). Le problème est alors résolu grâce au Lemme :

Lemme : Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_i$ ont la même arête $[XY]$, alors $\mathcal{C} = \mathcal{C}_i$.

Preuve du Lemme : Supposons que $[XY] = [AB]$ sans restreindre la généralité. Une face de $\mathcal{C}$ (et de $\mathcal{C}_i$) s'écrira $[ABZT]$, où $[ABZT]$ est un carré de côtés de longueurs AB et où Z et T sont des sommets du dodécaèdre. Il n'existe que deux tels carrés, à savoir $[ABCD]$ ou $[ABD'C']$, par conséquent $\mathcal{C}$ (et $\mathcal{C}_i$) sera $ABCDA'B'C'D'$ ou le cube $ABD'C'A'B'DC$ (ces cubes ont été obtenus en complétant $ABCD$ ou $ABD'C'$ par symétrie par rapport à O). Puisque ces deux cubes sont identiques, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_i$. ■

IV.4.a. Un automorphisme orthogonal f de G transforme un cube de centre O inscrit dans le dodécaèdre et isométrique à $\mathcal{C}_0$ en un cube ayant les mêmes propriétés, donc en un cube

appartenant à $\mathcal{K} = \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$. Il reste seulement à prouver que f permute ces cubes, autrement dit que

$$f(\mathcal{C}_i) = f(\mathcal{C}_j) \Rightarrow \mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j.$$

Puisque $\mathcal{C}_j = s^{j-i}(\mathcal{C}_i)$,

$$f(\mathcal{C}_i) = f(\mathcal{C}_j) \Rightarrow f(\mathcal{C}_i) = f \circ s^{j-i}(\mathcal{C}_i).$$

On suppose ici que $f(\mathcal{C}_i)$ est l'ensemble ordonnée des images des 8 sommets de $\mathcal{C}_i$ donnés dans un ordre fixé, tout comme $f \circ s^{j-i}(\mathcal{C}_i)$. L'égalité précédente montre donc que f et $f \circ s^{j-i}$ sont deux rotations qui coïncident sur trois points distincts non alignés de E, donc sont égales. Ainsi $f = f \circ s^{j-i}$ d'où $s^{j-i} = Id$ et $i = j$. Cela donne $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j$.

IV.4.b. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G & \to & \mathcal{S}_{\mathcal{K}} \\ & f & \mapsto & \Phi(f) \end{array}$$

qui à f appartenant à G associe la permutation

$$\Phi(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_0 & \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_4 \\ f(\mathcal{C}_0) & f(\mathcal{C}_1) & f(\mathcal{C}_2) & f(\mathcal{C}_3) & f(\mathcal{C}_4) \end{pmatrix}$$

est bien définie. C'est un morphisme de groupes puisque, si f et g appartiennent à G,

$$\begin{aligned} \Phi(f) \circ \Phi(g) &= \begin{pmatrix} g(\mathcal{C}_0) & g(\mathcal{C}_1) & g(\mathcal{C}_2) & g(\mathcal{C}_3) & g(\mathcal{C}_4) \\ f(g(\mathcal{C}_0)) & f(g(\mathcal{C}_1)) & f(g(\mathcal{C}_2)) & f(g(\mathcal{C}_3)) & f(g(\mathcal{C}_4)) \end{pmatrix} \\ &\qquad \circ \begin{pmatrix} \mathcal{C}_0 & \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_4 \\ g(\mathcal{C}_0) & g(\mathcal{C}_1) & g(\mathcal{C}_2) & g(\mathcal{C}_3) & g(\mathcal{C}_4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_0 & \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{C}_3 & \mathcal{C}_4 \\ f \circ g(\mathcal{C}_0) & f \circ g(\mathcal{C}_1) & f \circ g(\mathcal{C}_2) & f \circ g(\mathcal{C}_3) & f \circ g(\mathcal{C}_4) \end{pmatrix} = \Phi(f \circ g). \end{aligned}$$

IV.4.c.

	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$
r	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_2$
s	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_0$
t	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_3$

IV.4.d. D'après ce qui précède, et en identifiant commodément $\mathcal{C}_i$ à i,

$$\Phi(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \Phi(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

La décomposition de ces permutations en cycles est

$$\Phi(r) = (0)(1,4,2)(3); \quad \Phi(s) = (0,1,2,3,4); \quad \Phi(t) = (0,1)(2)(3,4).$$

De façon générale, un cycle de longueur l s'écrit très simplement comme le produit de $l-1$ transpositions. Par exemple, le cycle $(a_1, a_2, ..., a_{l-1}, a_l)$ s'écrit

$$(a_1, a_2, ..., a_{l-1}, a_l) = (a_1, a_l)(a_1, a_{l-1}) ... (a_1, a_3)(a_1, a_2).$$

Cela permet d'obtenir les décompositions suivantes en produit de transpositions

$$\Phi(r) = (1,2)(1,4); \quad \Phi(s) = (0,4)(0,3)(0,2)(0,1); \quad \Phi(t) = (0,1)(3,4).$$

Ainsi

$$\varepsilon(\Phi(r)) = (-1)^2 = 1; \quad \varepsilon(\Phi(s)) = (-1)^4 = 1; \quad \varepsilon(\Phi(t)) = (-1)^2 = 1$$

et les permutations r, s et t sont paires.

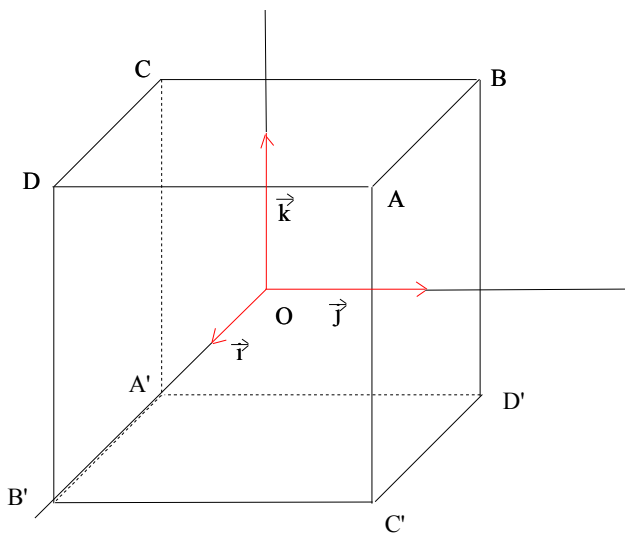
IV.5.a. Montrons l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) f appartient à $\mathrm{SO}(E)$ et laisse $\mathcal{C}_0$ globalement invariant,

ii) f est un endomorphisme de E tel que

$$f\left(\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right) \subset \left\{\pm\overrightarrow{i}, \pm\overrightarrow{j}, \pm\overrightarrow{k}\right\}, \quad f\left(\overrightarrow{j}\right) \neq \pm f\left(\overrightarrow{i}\right) \quad \text{et} \quad f\left(\overrightarrow{k}\right) = f\left(\overrightarrow{i}\right) \wedge f\left(\overrightarrow{j}\right).$$

• i) $\Rightarrow$ ii) : Une application f de $\mathrm{SO}(E)$ transforme la base orthonormale directe $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ en une base orthonormale directe, donc $f\left(\overrightarrow{k}\right) = f\left(\overrightarrow{i}\right) \wedge f\left(\overrightarrow{j}\right)$. Par ailleurs, si f conserve $\mathcal{C}_0$, alors f transforme une arête du cube en une autre arête du cube. On remarque que $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{C'A} = 2\overrightarrow{k}$. On remarque aussi que, si $[XY]$ est une arête de $\mathcal{C}_0$, alors $\overrightarrow{XY} \subset \left\{\pm\overrightarrow{BA}, \pm\overrightarrow{DA}, \pm\overrightarrow{C'A}\right\}$. Par conséquent l'image de $\overrightarrow{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ par f appartiendra à l'ensemble $\left\{\pm\overrightarrow{i}, \pm\overrightarrow{j}, \pm\overrightarrow{k}\right\}$, et une fois $f\left(\overrightarrow{i}\right)$ fixé, l'image $f\left(\overrightarrow{j}\right)$ appartiendra à $\left\{\pm\overrightarrow{i}, \pm\overrightarrow{j}, \pm\overrightarrow{k}\right\} \setminus \left\{\pm f\left(\overrightarrow{i}\right)\right\}$ (puisque f est bijective). On a montré ii).



• ii) $\Rightarrow$ i) : Par hypothèse, la matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ ne contiendra que des coefficients 0 ou ± 1, et de telle façon qu'un seul ± 1 apparaisse chaque fois sur chacune des ligne et chacune des colonnes. Les formules analytiques définissant f seront donc de la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Les 8 sommets du cube $\mathcal{C}_0$ admettent les coordonnées $(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ dans le repère $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Il suffit de remplacer (x, y, z) par $(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'')$ pour constater que (x', y', z') sera un sommet du cube (on identifie ici, comme le fait l'énoncé, les points M de l'espace affine et les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ d'origine O et d'extrémité M). En conclusion $f(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_0$, et même $f(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0$ si l'on rappelle que f est injective et si l'on compare les cardinaux de $f(\mathcal{C}_0)$ et $\mathcal{C}_0$. Enfin $f \in \mathrm{SO}(E)$ puisque $f\left(\overrightarrow{k}\right) = f\left(\overrightarrow{i}\right) \wedge f\left(\overrightarrow{j}\right)$. Cela montre i).

• On peut maintenant déduire toutes les applications orthogonales positives qui consservent le cube $\mathcal{C}_0$. Pour obtenir une telle application f, il faut choisir $f\left(\overrightarrow{i}\right)$ dans $\left\{\pm\overrightarrow{i}, \pm\overrightarrow{j}, \pm\overrightarrow{k}\right\}$, soit 6 possibilités, puis $f\left(\overrightarrow{j}\right)$ dans $\left\{\pm\overrightarrow{i}, \pm\overrightarrow{j}, \pm\overrightarrow{k}\right\} \setminus \left\{\pm f\left(\overrightarrow{i}\right)\right\}$, soit 4 possibilités. On dénombre donc $6 \times 4 = 24$ rotations laissant le cube invariant. In extenso, on obtient les matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} i & j \\ j & k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} i & j \\ k & j \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} i & j \\ i & k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} i & j \\ k & i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

IV.5.b. G_0 est constitué des automorphismes f dont les matrices sont listées dans la question précédentes et qui laissent stable le dodécaèdre. On peut faire des tests et calculer les images des sommets du dodécaèdre, pour s'apercevoir que l'on ne retient que 12 rotations sur les 24 de la question précédente. En fait, il suffit d'effectuer le test sur les sommets I, J, K, L, M, N, I', J', K', L', M', N' autres que ceux de $\mathcal{C}_0$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = L,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = K,$$

et ainsi de suite... Donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in G_0.$$

Par contre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -b \end{pmatrix}$$

n'est pas un sommet du dodécaèdre, donc la matrice est à rejeter. Après calculs, on constate que G_0 est formé des 12 matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}$: il ne reste plus rien !

3. $\begin{pmatrix} i & j \\ j & k \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} i & j \\ k & j \end{pmatrix}$: il ne reste plus rien !

5. $\begin{pmatrix} i & j \\ i & k \end{pmatrix}$: il ne reste plus rien !

6. $\begin{pmatrix} i & j \\ k & i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

IV.5.c. Par définition $G_i = \{f \in G \,/\, f(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_i\}$. Si $f \in G$, on a donc

$$f \in G_i \Leftrightarrow f(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_i \Leftrightarrow f\left(s^i(\mathcal{C}_0)\right) = s^i(\mathcal{C}_0) \Leftrightarrow s^{-i} f s^i(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow s^{-i} f s^i \in G_0,$$

de sorte que l'application

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \to & G_i \\ f & \mapsto & s^i f s^{-i} \end{array}$$

soit bien définie. C'est clairement un isomorphisme de groupes (il s'agit d'une "conjuguaison").

IV.5.d. • On reprend chacune des 12 rotations de G_0 et l'on ne conserve que celles qui laisse $\mathcal{C}_1 = JCN'KJ'C'NK'$ invariant. Compte tenu des symétries par rapport à O, il suffit de vérifier que les images de J, C, N, K restent des sommets de $\mathcal{C}_1$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = I \notin \mathcal{C}_1$$

donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin G_0 \cap G_1$. Voici après calculs les 4 seuls éléments de $G_0 \cap G_1$:

1. $\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} i & j \\ j & k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} i & j \\ k & i \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

• Parmi les 4 éléments précédents, ne retenons que ceux qui conservent $\mathcal{C}_2 = DN'I'LD'NIL'$. Les calculs montrent qu'il ne reste plus que l'identité. Ainsi $G_0 \cap G_1 \cap G_2 = \{I\}$.

• Montrer que le morphisme Φ est injectif revient à prouver que son noyau est réduit à $\{Id\}$. Si $\Phi(f) = Id$, f laisse globalement invariant chacun des 5 cubes $\mathcal{C}_i$, à fortiori $f \in G_0 \cap G_1 \cap G_2 = \{I\}$ et l'on obtient bien $f = Id$.

IV.6.a. • Supposons S_- non vide, et choisissons un élément g dans S_-. Posons

$$S_+ g = \{f \circ g \,/\, f \in S_+\}.$$

On vérifie que $S_- = S_+ g$. En effet, si $h \in S_-$, alors $h \circ g^{-1}$ est de signature

$$\varepsilon\left(h \circ g^{-1}\right) = \varepsilon(h)\left(\varepsilon(g)\right)^{-1} = (-1) \times (-1) = 1$$

donc appartient à $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$. Si l'on pose $f = h \circ g^{-1}$ on obtient $h = f \circ g$ avec $f \in S_+$, donc $S_- \subset S_+ g$. L'inclusion réciproque est aussi vraie puisque tout élément $f \circ g$ de $S_+ g$ (avec $f \in S_+$) est de signature $\varepsilon(f \circ g) = \varepsilon(f)\,\varepsilon(g) = 1 \times (-1) = -1$ donc appartient à S_-.

Puisque $S_- = S_+ g$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \xi : & S_+ & \to & S_- = S_+ g \\ & f & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

est bien définie et surjective. Elle est aussi injective puisque $f \circ g = f' \circ g$ entraîne $f = g$ (la permutation g est bien entendu une bijection de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$). En conclusion, les ensembles S_+ et S_- auront même cardinal : $|S_+| = |S_-|$.

• $\Phi(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$. S'il possède un élément impair, $\Phi(G)$ apparaît comme la réunion disjointe de deux ensembles non vides et de même cardinal :

$$\Phi(G) = \Phi(G)_+ \dot{\cup} \Phi(G)_- \quad \text{et} \quad \left|\Phi(G)_+\right| = \left|\Phi(G)_-\right|. \qquad (\Supset)$$

$|G| \leq 60$ (**III.3.d**) et Φ est injective (**IV.5.d**) donc $|\Phi(G)| = |G| \leq 60$. D'après (**IV.4.d**) $\Phi(r)$, $\Phi(s)$ et $\Phi(t)$ sont des permutations paires d'ordre 3, 5 et 2. Comme 3, 5 et 2 sont premiers entre eux deux à deux, le sous-groupe $< \Phi(r), \Phi(s), \Phi(t) >$ engendré par ces trois éléments sera d'ordre $3 \times 5 \times 2 = 30$, et l'on déduit $\left|\Phi(G)_+\right| \geq 30$.

Si l'on avait $\left|\Phi(G)_+\right| > 30$, $(\Supset)$ entraînerait $|\Phi(G)| > 2 \times 30 = 60$ en contradiction avec (**III.3.d**). Donc $\left|\Phi(G)_+\right| = \left|\Phi(G)_-\right| = 30$ et il existe exactement 30 éléments impairs dans $\Phi(G)$.

IV.6.b. Si $f \in G$ est d'ordre impair $2m+1$, alors $f^{2m+1} = Id$, et $\Phi(f)^{2m+1} = \Phi(Id) = Id$ puisque Φ est un morphisme de groupes. Par suite $\varepsilon(\Phi(f))^{2m+1} = 1$, d'où $\varepsilon(\Phi(f)) = 1$ (puisque $\varepsilon(\Phi(f))$ ne peut prendre que deux valeurs ± 1). On vient de prouver la contraposée de l'assertion demandée.

IV.6.c. Puisque les ordres de r et s sont 3 et 5, et sont premiers entre eux, le sous-groupe $< \Phi(r), \Phi(s) >$ engendré par ces deux éléments sera de cardinal $3 \times 5 = 15$.

Le demi-tour t est le prototype de tous les demi-tours de G. En effet, $t(A) = J$ donc t est le demi-tour d'axe (OW) où W désigne le milieu de $[AJ]$. Par symétrie du dodécaèdre, n'importe quel demi tour d'axe (OZ), où Z désigne le milieu d'une arête, sera dans G. La réciproque est triviale : si f est un demi-tour de G, $f(A)$ est égal à l'un des sommets X du dodécaèdre, et f coïncide avec le demi-tour d'axe (OM_{AX}) où M_{AX} désigne le milieu de $[AX]$. On peut donc affirmer qu'il existe exactement $\frac{60}{2} = 30$ demi-tours dans G (on dénombre en effet $5 \times 12 = 60$ arêtes dans le dodécaèdre, mais deux arêtes symétriques par rapport à O engendrent le même demi-tour...).

Finalement, si Λ désigne l'ensemble des 30 demi-tours de G, alors $\Lambda \cap < \Phi(r), \Phi(s) > = \{Id\}$ (travailler sur les ordres : un élément d'ordre 2 ne peut pas appartenir à $< \Phi(r), \Phi(s) >$ au risque de contredire le Théorème de Lagrange) donc

$$|G| \geq |\Lambda| + |< \Phi(r), \Phi(s) >| = 30 + 15 = 45.$$

On sait que $\Phi(r)$, $\Phi(s)$ et $\Phi(t)$ sont toutes des permutations paires et que Φ est injective (**IV.5.d**). Par suite les 30 demi-tours de G seront "comme t" et $\left|\Phi(G)_+\right| \geq 45$. Si l'on avait $\Phi(G)_- \neq \emptyset$, la question (**IV.6.a**) donnerait $\left|\Phi(G)_-\right| = 30$, donc

$$|\Phi(G)| = \left|\Phi(G)_+\right| + \left|\Phi(G)_-\right| \geq 45 + 30,$$

ce qui est absurde puisque $|\Phi(G)| = |G| \leq 60$ d'après (**III.3.d**) et (**IV.5.d**). Ainsi $\Phi(G)_- = \emptyset$ et

$$\Phi(G) \subset \mathcal{A}_K.$$

La suite est très facile : puisque $45 \leq |G|$ et puisque Φ est injective (**IV.5.d**), $45 \leq |\Phi(G)| \leq 60$. Mais n'oublions pas que $\Phi(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}_K$, et donc que son ordre divise l'ordre de $\mathcal{A}_K$ (Théorème de Lagrange), c'est-à-dire $|\mathcal{A}_K| = \frac{|\mathcal{S}_K|}{2} = 60$.
Les diviseurs de 60 étant $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, on trouve $|\Phi(G)| = 60$ et par conséquent $\Phi(G) = \mathcal{A}_K$. Puisque Φ est un monomorphisme, on peut conclure à $G \simeq \mathcal{A}_K \simeq \mathcal{A}_5$.

Remarque : on vient de prouver que le groupe du dodécaèdre possède 60 éléments et qu'il est isomorphe au groupe $\mathcal{A}_5$ des permutations de signatures paires d'un ensemble à 5 éléments.

IV.7. Notons $\Lambda(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) = \{f \in G \,/\, f(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_j\}$. On a

$$f(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_j \Leftrightarrow f\left(s^i(\mathcal{C}_0)\right) = s^j(\mathcal{C}_0) \Leftrightarrow \left(s^{-j} \circ f \circ s^i\right)(\mathcal{C}_0) = (\mathcal{C}_0) \Leftrightarrow s^{-j} \circ f \circ s^i \in G_0$$

de sorte que l'on puisse définir l'application

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) & \rightarrow & G_0 \\ f & \mapsto & s^{-j} \circ f \circ s^i. \end{array}$$

On vérifie aisément que cette application est bijective (en effet, $s^{-j} \circ f \circ s^i = s^{-j} \circ g \circ s^i$ entraîne $f = g$ puisque s est bijective), donc.$|\Lambda(\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j)| = |G_0| = 12$ d'après (**IV.5.b**).

That'a all folks !

Remerciements à Nicolas Herla pour la relecture attentive du document et ses remarques pertinentes.